MINISTERE DE L'INDUSTRIE

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE

DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES

ET DES MINES D'ALES

CONCOURS D'ADMISSION 1982

EPREUVES D'ADMISSIBILITE

MATHEMATIQUES

(Temps accordé : 4 heures)

Les candidats doivent traiter le problème I et le problème II qui sont indépendants.

Ces problèmes seront rédigés sur des feuilles de composition séparées :

- *feuille rose pour le problème I*
- *feuille bleue pour le problème II*

N.B. : Les copies illisibles ou mal présentées sont corrigées aux risques et périls du candidat.

Les règles à calcul, tables de logarithmes et tables trigonométriques sans formulaires, ainsi que les calculatrices électroniques portatives autonomes non imprimantes sont autorisées.

Toutes autres documentations sont interdites.

PROBLEME 1

I - On se propose de calculer l'intégrale :

$$I(p,q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q \, dt \quad ; \quad (p,q) \in \mathbb{N}^2$$

1) Calculer : I (p,0).

2) Montrer que quel que soit l'entier q non nul :

$$I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$$

3) En déduire : I (p,q).

Exprimer le résultat à l'aide de factorielles.

II - Soit $\mathcal{D}$ le sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{F}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui ont des dérivées de tous ordres dans $\mathbb{R}$. On définit une application :

$$\mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{F}$$

$$(f,g) \longmapsto \Phi = f * g$$

en posant pour tout x réel :

$$\Phi(x) = (f*g)(x) = \int_0^x f(t)\, g(x-t)\, dt$$

1) Les applications f et g sont telles que :

$$f(x) = x^p \ , \quad g(x) = x^q \ , \quad p \in \mathbb{N} \ , \quad q \in \mathbb{N}$$

a) Calculer : $\Phi(1) = (f*g)(1)$.

b) Exprimer : $\Phi(x) = (f*g)(x)$ en fonction de x et de $\Phi(1)$.

2) Les applications f et g sont telles que :

$$f(x) = \sin ax \ , \quad g(x) = \cos ax \ , \quad a \text{ réel non nul.}$$

Calculer : $\Phi(x) = (f*g)(x)$.

- 192 -

3) Démontrer les propriétés suivantes pour toutes applications f, g, h de $\mathcal{D}$.

a) $f * g = g * f$

b) $(f + g) * h = (f * h) + (g * h)$

4) L'application g est telle que : $g(x) = 4x - 5$

f est une application quelconque de $\mathcal{D}$

Montrer que l'on peut écrire :

$$\Phi(x) = (f * g)(x) = x\int_0^x \lambda(t)\,dt + \int_0^x \mu(t)\,dt$$

λ et μ étant des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

En déduire une relation entre la dérivée seconde de Φ, la fonction f et sa fonction dérivée.

III - Les applications f et g sont telles que :

$$f(x) = \frac{1}{2(1+x^2)} \quad ; \qquad g(x) = 4x - 5$$

1) Calculer $\Phi(x) = (f * g)(x)$

2) On pose : $\Phi'(x) = \varphi(x)$

Etudier les variations de la fonction φ et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé ; on montrera en particulier que (C) coupe l'axe des abscisses en un point unique d'abscisse α dont on donnera un encadrement à une unité près.

3) Montrer que la dérivée $n^{ième}$ de φ peut s'écrire :

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}} \quad ; \quad P_{n+1}(x) = \sum_{p=o}^{n+1} a_p\, x^p$$

P_{n+1} étant une fonction polynome de degré $(n + 1)$ dont on calculera le coefficient du terme de plus haut degré en fonction de n.

4) Montrer que P_{n+1} admet dans $\mathbb{R}$, $n + 1$ zéros distincts.

(Le réel x_p est un zéro de P_{n+1} si et seulement si : $P_{n+1}(x_p) = 0$).

PROBLEME II

A] - Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

On désigne par $P_{(a,b,c)}$ l'élément de E tel que :

$$P_{(a,b,c)} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto P_{(a,b,c)}(x) = ax^2 + bx + c \; ; \; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$$

On note $B = (P_{(1,0,0)} ; P_{(0,1,0)} ; P_{(0,0,1)})$ la base canonique de E ;

Soit $f_{\alpha,\beta}$ l'application définie sur E par la relation :

$$f_{\alpha,\beta}\left[P_{(a,b,c)}\right] = P_{(0,\alpha,3)} \times P'_{(a,b,c)} + \beta . P_{(a,b,c)} \; ; (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$$

où $P'_{(a,b,c)}$ désigne le polynôme dérivé de $P_{(a,b,c)}$.

1) Montrer que $f_{\alpha,\beta}$ est un endomorphisme de E.

2) Déterminer la matrice $F_{\alpha,\beta}$ de $f_{\alpha,\beta}$ relative à la base B.

3) Discuter suivant les valeurs des réels α et β le rang et la nature du noyau de $f_{\alpha,\beta}$

En déduire les solutions dans E des équations vérifiant pour toute valeur réelle de x :

$$(2x + 3) P'_{(a,b,c)}(x) - 2P_{(a,b,c)}(x) = 0$$

$$(2x + 3) P'_{(a,b,c)}(x) - 4P_{(a,b,c)}(x) = 0$$

.../...

4) Vérifier que $(P_{(1,1,1)} ; P_{(0,1,1)} ; P_{(0,0,-1)})$ définit une nouvelle base B' de E.

Déterminer la matrice $F'_{\alpha,\beta}$ de $f_{\alpha,\beta}$ relative à la base B'.

5) On pose $E' = \left\{ P_{(a,b,c)} \in E \; ; \; a - b + c = 0 \right\}$ et

$E'' = \left\{ P_{(a,b,c)} \in E \; ; \; a = 2b = c \right\}$

Montrer que E' et E'' sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

B] - On désigne désormais par F la matrice de $f_{0,1}$ ($\alpha = 0$ et $\beta = 1$) relative à la base B et on pose $G = F - I$ où :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) a) Calculer G^k pour tout entier k naturel non nul et en déduire F^n en fonction de l'entier naturel non nul n.

b) Montrer que si n est supérieur ou égal à 3 alors F^n s'écrit comme combinaison linéaire de F^{n-1} ; F^{n-2} ; F^{n-3}

2) a) Soit S_r l'ensemble des suites réelles u telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1,2\} \quad u_n - 3u_{n-1} + 3u_{n-2} - u_{n-3} = r^n \quad (r \in \mathbb{R})$$

Sachant que S_0 est un espace vectoriel réel de dimension 3, montrer en utilisant B) 1b que les restrictions de $P_{(1,0,0)}$; $P_{(0,1,0)}$; $P_{(0,0,1)}$ à $\mathbb{N}$ définissent une base de S_0.

b) Déterminer le réel λ pour que la suite réelle v définie par $v_n = \lambda r^n$ appartienne à S_r si r est différent de 1.

c) Déterminer le réel μ pour que la suite réelle w définie par $w_n = \mu n^3$ appartienne à S_1.

d) En déduire l'ensemble S_r suivant les valeurs du réel r.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail